نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

I. نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين:

1- تعريف:

لتكن a، b، c، a'، b' و c' أعدادا حقيقية معلومة.

كل كتابة على شكل $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ تسمى نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

حل النظمة هو تحديد الأزواج $(x;y)$ التي تحقق المتساويتان معا.

مثال: الكتابات التالية عبارة نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين:

$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ x-5y=-4 \end{cases}$ و $\begin{cases} \sqrt{3}x+y=1 \\ 7x-\sqrt{5}y=0 \end{cases}$ و $\begin{cases} \frac{2}{5}x+3y=\sqrt{8} \\ -5x+y=10 \end{cases}$

تمرين تطبيقي1:

نعتبر النظمة التالية: $(S)\begin{cases} 3x-2y=4 \\ -x+5y=3 \end{cases}$

1- هل الزوج $(2;1)$ حل للنظمة(S).

2- هل الزوج $(-3;0)$ حل للنظمة(S).

الحل:

2- نعوض الزوج $(x;y)$ بالزوج $(2;1)$

فنحصل على: $\begin{cases} 3\times 2-2\times 1=4 \\ -2+5\times 1=3 \end{cases}$

يعني: $\begin{cases} 6-2=4 \\ -2+5=3 \end{cases}$

يعني: $\begin{cases} 4=4 \\ 3=3 \end{cases}$ وهذا صحيح

إذن الزوج $(2;1)$ حل لهذه للنظمة(S).

1- نعوض الزوج $(x;y)$ بالزوج $(-3;0)$

فنحصل على: $\begin{cases} 3\times(-3)-2\times 0=4 \\ -(-3)+5\times 0=3 \end{cases}$

يعني: $\begin{cases} -9-0=4 \\ 3+0=3 \end{cases}$

يعني: $\begin{cases} -9=4 \\ 3=3 \end{cases}$ وهذا غير صحيح

إذن الزوج $(-3;0)$ ليس حلا لهذه للنظمة(S).

II. الحل الجبري للنظمة:

1- طريقة التعويض:

تعتمد هذه الطريقة على حساب أحد المجهولين بدلالة الاخر في إحدى المعادلتين، ثم تعويضه في المعادلة الأخرى حيث نحصل على معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد.

مثال: لنحل النظمة التالية باستعمال طريقة التعويض

$$\begin{cases} x+2y=11 \\ 5x+3y=27 \end{cases}$$

❖ نحسب أحد المجهولين بدلالة الاخر في احدى المعادلتين: مثلانحسب xبدلالة y في المعادلة(1)

لدينا: $x+2y=11$

يعني: $x=11-2y$

❖ نعوض x بتعبيره في المعادلة (2)ونحدد قيمة y.

نحصل على: $5(11-2y)+3y=27$

يعني: $55-10y+3y=27$

يعني: $-10y+3y=27-55$

يعني: $-7y=-28$

يعني: $y=\frac{-28}{-7}=4$

❖ حساب x:

لدينا: $x=11-2y$

يعني: $x=11-2\times 4$

يعني: $x=11-8=3$

وبالتالي حل هذه النظمة هو الزوج (3;4).

تمرين تطبيقي2:

حل النظمات التالية باستعمال طريقة التعويض:

$$(S_1)\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=3 \end{cases} \text{ و } (S_2)\begin{cases} x+2y=7 \\ 4x-5y=2 \end{cases}; \text{ و } (S_3)\begin{cases} 3x+7y=25 \\ x+7y=10 \end{cases}$$

2- طريقة التأليفة الخطية:

هذه الطريقة تعتمد على ضرب كل معادلة في عدد بالكيفية التي تجعل معاملي أحد المجهولين متقابلان، ثم نجمع المعادلتين المحصل عليهما طرفا بطرف ، حيث نحصل على معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد

مثال

لنحل النظمة التالية باستعمال طريقة التأليفة الخطية:

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$$

❖ لنحدد x:

نضرب طرفي المعادلة (1) في العدد 1وطرفي المعادلة (2) في العدد 3-.

يعني: $\begin{cases} 2x\times 1+3y\times 1=1\times 1 \\ x\times(-3)+y\times(-3)=2\times(-3) \end{cases}$

يعني: $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -3x-3y=-6 \end{cases}$

نجمع المعادلتين معا طرفا بطرف

إذن: $2x+3y-3x-3y=1-6$

يعني: $2x-3x=-5$

يعني: $-x=-5$

ومنه: $x=5$

❖ لنحدد y:

نضرب طرفي المعادلة (1) في العدد 1وطرفي المعادلة (2) في العدد 2-.

يعني: $\begin{cases} 2x \times 1 + 3y \times 1 = 1 \times 1 \\ x \times (-2) + y \times (-2) = 2 \times (-2) \end{cases}$

يعني: $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -2x - 2y = -4 \end{cases}$

نجمع المعادلتين معا طرفا بطرف

إذن: $2x + 3y - 2x - 2y = 1 - 4$

يعني: $3y - 2y = -3$

ومنه: $y = -3$

وبالتالي حل هذه النظمة هو الزوج (5;-3).

تمرين تطبيقي3:

حل النظمات التالية باستعمال طريقة التأليفة الخطية:

$(S_1)\begin{cases} -x + y = -1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ و $(S_2)\begin{cases} -3x + y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$

III. الحل المبياني للنظمة:

تعتمد هذه الطريقة على ربط كل من معادلتي النظمةبمستقيم ، ثم تحديد زوج إحداثيتي نقطة تقاطعهما (في حالة تقاطعهما) مبيانيا ، وذلك بإنشاء هذين المستقيمين في م.م.م،حينئذ يكون هذا الزوج هو حل هذه النظمة.

مثال:

لنحل مبيانيا النظمة التالية: $\begin{cases} 5x + y = 4 \\ -3x + y = -4 \end{cases}$

ليكن (D_1) المستقيم الذي معادلته: $5x + y = 4$

ليكن (D_2) المستقيم الذي معادلته : $-3x + y = -4$

لنحدد المعادلة المختصر لكل من المستقيمين (D_1)و(D_2) لدينا : $\begin{cases} (D_1): y = -5x + 4 \\ (D_2): y = 3x - 4 \end{cases}$

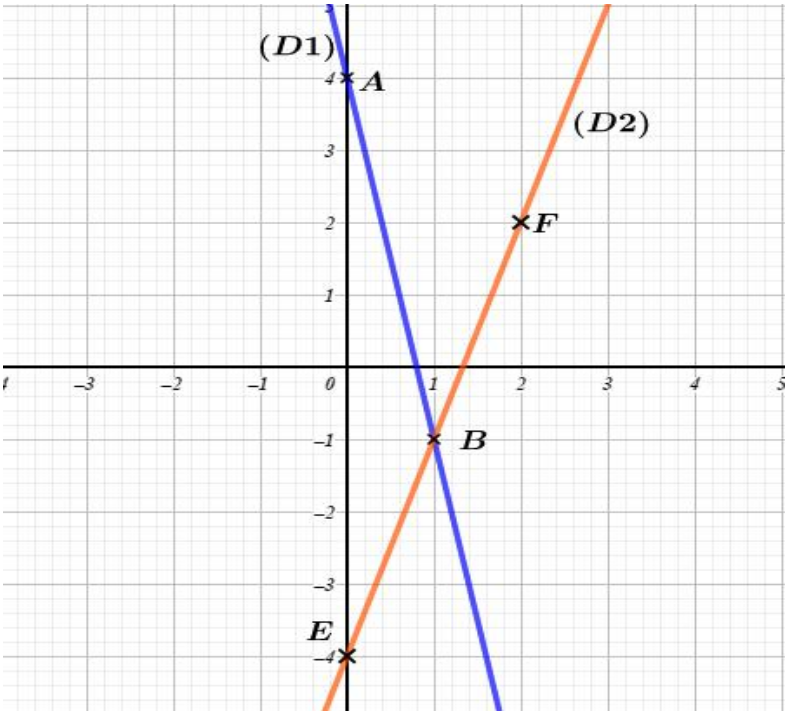
نلاحظ أن المستقيمين(D_1)و (D_2) ليس لهما نفس الميل ، إذن فهما مستقيمان متقاطعان .

و بالتالي للنظمة حلا وحيدا هو زوج إحداثيتي نقطة تقاطع المستقيمين (D_1) و (D_2).

لتكن $M(x_M; y_M)$ نقطة تقاطع المستقيمين (D_1)و(D_2) لنحدد زوج إحداثيتي M.

نعتبر المستوى منسوبا إلى معلم متعامد ممنظم(O ;I ;J)

لننشئ المستقيمين (D_1)و(D_2).



(D_1) :$y=-5x+4$		
x	0	1
y	4	-1
$M(x\ ;y)$	$A(0\ ;4)$	$B(1\ ;-1)$

(D_2) :$y=3x-4$		
x	0	2
y	-4	2
$M(x\ ;y)$	$E(0\ ;-4)$	$F(2\ ;2)$

نلاحظ مبيانيا أن المستقيمين متقاطعين في النقطة B(1 ;-1)

وبالتالي حل هذه النظمة هو الزوج (1 ;-1)

تمرين تطبيقي4:

حل مبيانيا النظمات التالية:

$$(S_1)\begin{cases}-x+y=-1\\2x+y=-2\end{cases};(S_2)\begin{cases}4x-y-2=0\\2x-y+2=0\end{cases}$$

IV. حل المسائل:

لحل مسألة نتبع المراحل التالية :

1-- اختيار المجهولين .

2-- صياغة النظمة .

3-- حل النظمة.

4-- التحقق من الحل .

5 -- الرجوع إلى المسألة .

مثال:

ساهمت مجموعة تتكون من 20 فردا (أساتذة و تلاميذ)، في شراء مجموعة من الكتب لخزانة المدرسة بثمن 320 درهما .إذا علمت أن كل أستاذ ساهم ب 30 درهم وأن كل تلميذ ساهم ب 10 دراهم،

فما هو إذن عدد الأساتذة وما هو عدد التلاميذ المساهمين ؟

❖ اختيار المجهولين :

ليكن x هو عدد التلاميذ المساهمين و y هو عدد الأساتذة المساهمين .

❖ صياغة النظمة :

عدد الأفراد الذين ساهموا هو 20 فردا من بينهم أساتذة و تلا ميذ ، إذن : $x + y = 20$.

ساهم كل أستاذ بـ 30 درهم و ساهم كل تلميذ بـ 10 دراهم بحيث مجموع مساهماتهم يساوي 320 درهما ، إذن : $10x + 3y = 320$.

إذن النظمة هي: $\begin{cases} x + y = 20 \\ 10x + 3y = 320 \end{cases}$.

❖ حل النظمة :

باتباع إحدى الطريقتين المذكرتين أعلاه نحصل على: x=14 و y=6 .

❖ التحقق من الحل:

لدينا: $14 + 6 = 20$ و $10 \times 14 + 3 \times 6 = 320$.

إذن الزوج(14 ;6) هو حل النظمة أعلاه .

❖ الرجوع إلى المسألة :

عدد التلاميذ هو : 14 .

عدد الأساتذة هو : 6 .

تمرين تطبيقي5: (مسألة)

يتوفر أحمد على 9 قطع نقدية من فئتين مختلفتين 5 دراهم و 10 دراهم، علما أن المبلغ الذي يتوفر عليه أحمد هو 60 درهما.

فما هو عدد القطع النقدية من كل فئة؟