Durée : 02 heures

Exercice 01 : (03pts)

0,75 1)- *Résoudre dans l'ensemble, l'équation :* $(E): z^2 - 4z + 13 = 0$.

2)- *Dans le plan complexe* (P) *muni d'un repère orthonormé direct* $(O,\vec{u},\vec{v})$ *, On Considère les points* A, B *et* C *d'affixes :* $z_A = i$, $z_B = 2+3i$ *et* $z_C = 2-3i$.

a)- *Soit* r *la rotation de centre* B *et d'angle* $\frac{\pi}{4}$, *On pose* $A' = r(A)$.

0,75 ✓ *Montrer que :* $z_{A'} = -2i\sqrt{2}$.

1 b)- *Ecrire sous forme algébrique* $\dfrac{z_{A'} - z_B}{z_C - z_B}$, *les points* A, B *et* C *sont-ils alignés ?*

0,5 c)- *Donner l'écriture complexe de l'homothétie* r *de centre* B *tels que* $A' = h(C)$.

Exercice 02 : (17pts)

I- *Soit* g *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *par :*

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right); g(x) = 1 + x\ln x.$$

0,5 1)- *Montrer que :* $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right); g'(x) = 1 + \ln x$.

0,75 2)- *Dresser le tableau de variation de* g *en justifiant votre réponse .*

0,5 3)- *Justifier que :* $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right); g(x) > 0$.

0,75 4)- *Montrer que :* $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right); (x-1)\ln x \geq 0$ *(On pourra étudier deux cas).*

II- *On considère la fonction* f *définie par :*

$$f(x) = (\ln x)^2 + \frac{\ln x}{x} + 1.$$

0,75 1)- a)- *Déterminer* D_f, *puis calculer* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

0,75 b)- *Montrer que* $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, *puis interpréter géométriquement ce résultat .*

0,75 2)- a)- *Montrer que :* $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right); f'(x) = \dfrac{(x-1)\ln x + g(x)}{x^2}$.

0,5 b)- *Ecrire l'équation de la tangente* (Δ) *à* (C_f) *au point d'abscisse* $x_0 = 1$.

1 c)- *Montrer que* f *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}^{*+}$, *puis dresser son tableau de variation complet .*

0,5 3)- a)- Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ (On pourra poser $t=\sqrt{x}$).

0,75 b)- En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$, puis déterminer la nature de la branche Infini de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

1 4)- a)- Montrer que l'équation $f(x)=0$, admet une solution unique α dans $\mathbb{R}^{*+}$ Et que $\frac{1}{4}<\alpha<\frac{3}{4}$.

1 b)- Construire la tangente (Δ) et (C_f) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0,75 5)- a)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} sur $\mathbb{R}$.

0,75 b)- Montrer que f^{-1} est dérivable en $b=1$ et que : $\left(f^{-1}\right)'(1)=1$.

1 c)- Construire la courbe $\left(C_{f^{-1}}\right)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0,5 6)- a)- Calculer $I=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$.

0,75 b)- En utilisant une intégration par parties , montrer que : $\int_1^e(\ln x)^2\,dx=e-2$.

0,75 c)- En déduire en cm^2 l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f) l'axe (Ox) Les droites d'équations : $x=1$ et $x=e$.

1 7)- Graphiquement justifier que $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});f(x)\le x$ et que l'équation $f(x)=x$ Admet une solution unique que l'on déterminera .

III- On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0=2 \text{ et } (\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=f(u_n).$$

0,75 1)- Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N});u_n\ge1$.

0,75 2)- Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante , puis en déduire qu'elle est convergente .

0,5 3)- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ en justifiant votre réponse .

Fin Du Sujet.