# النهايات و الاتصال

## I- النهاية المنتهية

### 1- النهاية l عند $x_0$

### أ- النهاية 0 عند 0

تمرين

نعتبر الدالتين $f$ و $g$ حيث $f(x)=x^2$ و $g(x)=\frac{x^3}{|x|}$

1- أ) مثل مبيانيا $f$

ب) بين مبيانيا أن $\forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists \alpha \succ 0 / \quad f\left(\left]-\alpha;\alpha\right[-\{0\}\right) \subset \left]-\varepsilon;\varepsilon\right[$

ج) بين ذلك جبريا

2- أ) مثل مبيانيا $g$

ب) بين مبيانيا أن $\forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists \alpha \succ 0 / \quad g\left(\left]-\alpha;\alpha\right[-\{0\}\right) \subset \left]-\varepsilon;\varepsilon\right[$

ج) بين ذلك جبريا

3- أتمم الجدول التالي

| $x$ | $f(x)$ | $g(x)$ |
|---|---|---|
| $-10^{-2}$ | | |
| $-10^{-5}$ | | |
| $-10^{-100}$ | | |
| 0 | ////////////////////// | ////////////////////// |
| $10^{-100}$ | | |
| $10^{-5}$ | | |
| $10^{-2}$ | | |

**ملاحظة:**

نلاحظ كلما اقترب $x$ من 0 يقترب $f(x)$ من 0، بل أكثر كلما كان $x$ يؤول إلى 0 فان $f(x)$ يؤول إلى 0

نقول إن نهاية $f$ هي 0 عندما يؤول $x$ إلى 0

نكتب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

نفس الملاحظة على الدالة $g$

**تعريف**

لتكن $f$ دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه0

نقول إن نهاية $f$ هي 0 عندما يؤول $x$ إلى 0 إذا وفقط إذا كان

$$\forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists \alpha \succ 0 \quad \forall x \in D_f \quad 0 \prec |x| \prec \alpha \Rightarrow |f(x)| \prec \varepsilon$$

نكتب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

**ملاحظة**

* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=0$

* إذا كانت $f$ و $g$ منطبقتين على مجال مفتوح منقط مركزه0 و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ فان $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$

**خاصية**

$$\forall a\in\mathbb{R}\quad \forall n\in\mathbb{N}^*\qquad \lim_{x\to0} ax^n=0\qquad \lim_{x\to0} a\sqrt{x}=0$$

**خاصية**

إذا وجد مجال $I$ مفتوح منقط مركزه 0 بحيث $|f(x)|\le u(x)$ $\forall x\in I$ و كان $\lim_{x\to0} u(x)=0$ فان $\lim_{x\to0} f(x)=0$

البرهان

ليكن $\beta\succ0$ و $I=]-\beta;\beta[-\{0\}$

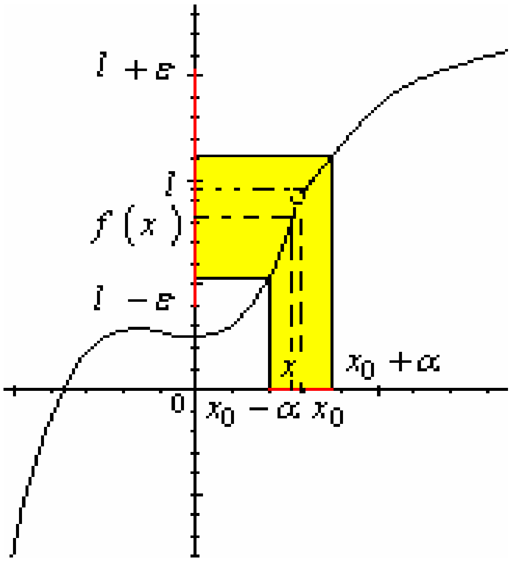
لدينا $|f(x)|\le u(x)$ $\quad\forall x\in]-\beta;\beta[-\{0\}$

و حيث أن $\lim_{x\to0} u(x)=0$ فان $\forall\varepsilon\succ0\ \ \exists\alpha\succ0\ \ \forall x\in D_f\ \ 0\prec|x|\prec\alpha\Rightarrow|u(x)|\prec\varepsilon$

نعتبر $\lambda=\inf(\alpha;\beta)$ $\quad\forall\varepsilon\succ0\ \ \exists\lambda\succ0\ \ \forall x\in D_f\ \ 0\prec|x|\prec\lambda\Rightarrow\begin{cases}|u(x)|\prec\varepsilon\\ |f(x)|\le u(x)\end{cases}$

و بالتالي $\forall\varepsilon\succ0\ \ \exists\lambda\succ0\ \ \forall x\in D_f\ \ 0\prec|x|\prec\lambda\Rightarrow|f(x)|\prec\varepsilon$

إذن $\lim_{x\to0} f(x)=0$




<u>تمرين</u>

بين أن $\lim_{x\to0} x\sin\frac{1}{x}=0$ ; $\lim_{x\to0}\frac{x}{x+1}=0$

**<u>ب- النهاية l عند $x_0$</u>**

لتكن $f$ دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه $x_0$

حدسيا: $f(x)$ تؤول إلى $l$ عندما يؤول $x$ إلى $x_0$

عندما يقترب $x$ من $x_0$ أي عندما تقترب $h$ من 0

حيث $h=x-x_0$ فان $f(x)-l$ تقترب من 0

أي $f(x_0+h)-l$ تقترب من 0

**تعريف**

لتكن $f$ دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه $x_0$

نقول إن نهاية $f$ هي $l$ عندما يؤول $x$ إلى $x_0$ إذا وفقط إذا كان نهاية الدالة $h\to f(x_0+h)-l$ هي 0

عندما يؤول $h$ إلى 0

نكتب $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$

**ملاحظة**

* $\lim_{x\to x_0} f(x)=l\Leftrightarrow\lim_{h\to0} f(x_0+h)=l$

* $\lim_{x\to x_0} f(x)=l\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0} f(x)-l=0$

* إذا كانت لدالة نهاية عند $x_0$ فان هذه النهاية وحيدة

* $\lim_{x\to x_0} f(x)=l\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0} f(x)-l=0$

* $\lim_{x\to x_0} a(x-x_0)^n=0\qquad\forall a\in\mathbb{R}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

<u>تمرين</u> بين أن $\lim_{x\to4}\frac{2x-1}{x-3}=9$

**خاصية**

اذا وجد مجال $I$ مفتوح منقط مركزه $x_0$ بحيث $|f(x)-l| \le u(x)$ $\forall x \in I$ و كان $\lim_{x\to x_0} u(x) = 0$
فان $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

تمرين

بين أن $\lim_{x\to 0} 2 + x^2 \cos\frac{1}{x} = 2$

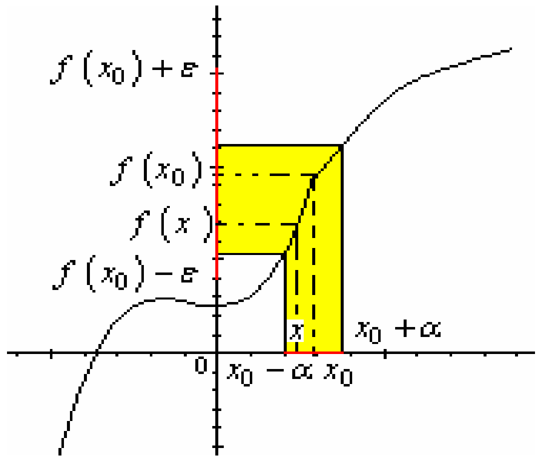
**خاصية**

إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ فان $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$

2- اتصال دالة

أ- تعريف

لتكن $f$ دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه $x_0$
تكون $f$ متصلة في $x_0$ إذا وفقط إذا كان
$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$




**أمثلة**

الدوال $x \to ax^n$ متصلة في 0 $\left(n \in \mathbb{N}^* \quad a \in \mathbb{R}\right)$

الدوال الثابتة متصلة في كل نقطة من مجموعة تعريفها

الدالة $x \to \sqrt{|x|}$ متصلة في 0

**اصطلاح**

إذا كانت $f$ دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه $x_0$ و كانت غير متصلة في $x_0$ فإننا نقول إن $f$ متقطعة في $x_0$

تمرين

نعتبر $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} & x \ne 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

أدرس اتصال $f$ في1

**ب- خاصية**

كل دالة حدودية متصلة في كل نقطة من $\mathbb{R}$

البرهان

لتكن $P$ دالة حدودية و $x_0$ عنصر من $\mathbb{R}$

نعلم أنه توجد حدودية $Q$ حيث $P(x) - P(x_0) = (x - x_0)Q(x)$

نفترض أن

$Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ....... + a_1 x + a_0$ $|Q(x)| \le |a_n||x^n| + |a_{n-1}||x^{n-1}| + ....... + |a_1||x| + |a_0|$

ليكن $M$ أكبر الأعداد $|a_i|$ حيث $i \in \{0;1...;n\}$ ومنه $|Q(x)| \le M(|x^n| + |x^{n-1}| + ....... + |x| + 1)$

نفترض أن $x_0 - 1 \prec x \prec x_0 + 1$ و $\alpha = \sup(|x_0 - 1|;|x_0 + 1|)$ ومنه $|x| \prec \alpha$

و بالتالي $|Q(x)| \le M(\alpha^n + \alpha^{n-1} + .... + \alpha + 1)$

نضع $k = M(\alpha^n + \alpha^{n-1} + .... + \alpha + 1)$ ومنه $|x - x_0||Q(x)| \le k|x - x_0|$

وبالتالي $\left|P(x)-P(x_0)\right| \leq k\left|x-x_0\right|$

و حيث أن $\lim_{x\to x_0} k\left|x-x_0\right| = 0$ فان $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$

إذن $P$ متصلة في $x_0$

## ج- تطبيقات على حساب النهايات

حدد $\lim_{x\to -1} 3x^2+4x-2$ ; $\lim_{x\to 2}\left|x^2-7x-2\right|$ $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-5x+2}{x-1}$ ; $\lim_{x\to 5}\frac{x^3-4x^2-4x-5}{x-5}$

## د- تمديد بالاتصال

الدالة $f : x \to \frac{x^2-1}{x-1}$ غير معرفة في 1

ولدينا $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$

الدالة $g$ المعرفة بـ $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ g(1) = 2 \end{cases}$ تنطبق على $f$ في $\mathbb{R}-\{1\}$ ومتصلة في 1

نقول ان $g$ تمديد بالاتصال لدالة $f$ في 1

**تعريف**

لتكن $f$ دالة غير معرفة في $x_0$ لكن لها نهاية $l$ في $x_0$

الدالة $g$ المعرفة بـ $\begin{cases} g(x) = f(x) & x \in D_f \\ g(x_0) = l \end{cases}$ هي دالة متصلة في $x_0$ تسمى تمديد بالاتصال لدالة $f$ في $x_0$

تمرين

أعط تمديدا بالاتصال لدالة $f$ في $x_0$ في الحالتين

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{3x^2+2x-8}{x+2} \\ x_0 = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = x\sin\dfrac{1}{x^2} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

## 3- النهاية على اليمين- النهاية على اليسار

نعتبر الدالة $f$ المعرفة بـ $f(x) = \dfrac{|x-1|(x+2)}{x-1}$

$D_f = \mathbb{R}-\{1\}$ ( أنشئ $C_f$ )

* نلاحظ أن قصور الدالة $f$ على $]1;+\infty[$ ينطبق مع قصور الدالة $g$ حيث $g(x) = x+2$

ونعلم أن $\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} x+2 = 3$

نقول ان نهاية $f$ هي 3 عل يمين 1

و نكتب $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$ أو $\lim_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}} f(x) = 3$

* نلاحظ أن قصور الدالة $f$ على $]-\infty;1[$ ينطبق مع قصور الدالة $h$ حيث $h(x) = -x-2$

ونعلم أن $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} -x-2 = -3$

نقول ان نهاية $f$ هي 3- على يسار 1

و نكتب $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-3$ أو $\lim_{\substack{x\to 1\\ x\prec 1}} f(x)=-3$

**تعريف**

لتكن $f$ دالة معرفة على مجال من نوع $]x_0;x_0+\alpha[$ حيث $\alpha \succ 0$

نقو ل ان $f$ تقبل النهاية $l$ على يمين $x_0$ إذا كان قصورها على $]x_0;x_0+a[$ حيث $a\succ 0$ ينطبق مع قصور

دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه $x_0$ تكون نهايتها $l$ عند $x_0$ و نكتب $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l$

أو $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\succ x_0}} f(x)=l$

بالمثل نعرف النهاية على اليسار

**خاصية**

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=l$$

تمرين

أدرس نهاية الدالة $f$ في $x_0$ في الحالتين التاليتين

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3+2|x|}{x} \\ x_0=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x)=x^2+4x+4 & x\succ -2 \\ f(x)=2x^2+2x & x\le -2 \\ x_0=-2 \end{cases}$$

**نتائج**

تكون $f$ متصلة على يمين $x_0$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$

تكون $f$ متصلة على يسار $x_0$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$

تكون $f$ متصلة في $x_0$ إذا وفقط إذا كان تكون $f$ متصلة على يمين $x_0$ وعلى يسار $x_0$

تمرين

1- حدد $a$ لكي تكون $f$ متصلة في $-1$

$$\begin{cases} f(x)=x^3+ax & x\succ -1 \\ f(x)=-x+1 & x\le -1 \end{cases}$$

2- أدرس اتصال $f$ في $x_0$ في الحالتين

$$\begin{cases} f(x)=2x+1 & x\succ 2 \\ f(x)=x^2-1 & x\le 2 \end{cases} \quad ; \quad x_0=2$$

$$\begin{cases} f(x)=x\sin\dfrac{1}{x} & x\succ 0 \\ f(x)=x^2-x & x\le 0 \end{cases} \quad ; \quad x_0=0$$

## 4- الاتصال في مجال

**تعريف**

لتكن $f$ دالة معرفة على $[a;b]$

تكون $f$ متصلة على $]a;b[$ إذا وفقط إذا كانت متصلة في كل نقطة من $]a;b[$

تكون $f$ متصلة على $[a;b]$ إذا وفقط إذا كانت متصلة في كل نقطة من $]a;b[$ ومتصلة على يمين $a$ و متصلة على يسار $b$

بالمثل نعرف الاتصال على $]a;b]$ و على $[a;b[$

ملاحظة

التمثيل المبياني لدالة متصلة على $[a;b]$ هو خط متصل طرفاه النقطتين اللتين إحداثيتيهما $(a;f(a))$ و $(b;f(b))$

## II- النهاية المنتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

### 1- النهاية 0 عند $+\infty$

تمرين

نعتبر الدالة $f$ حيث $f(x)=\dfrac{1}{x}$

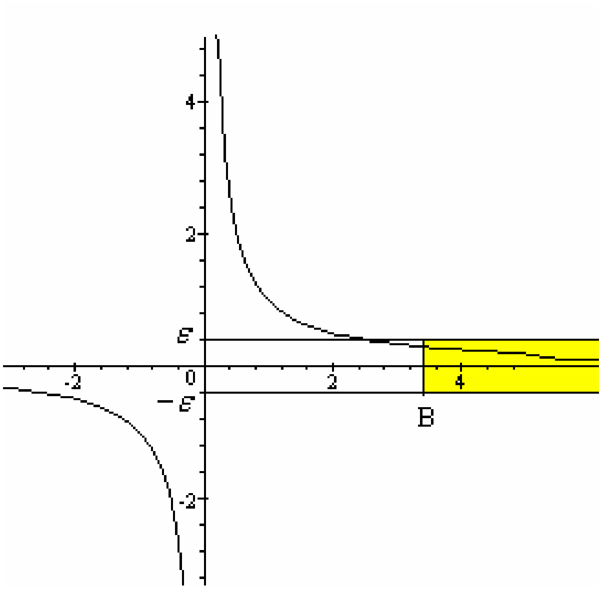
1- أرسم $C_f$

2- أتمم الجدول التالي و ماذا تلاحظ

| $x$ | $10^{100}$ | $10^{10^{9}}$ | $10^{10^{12}}$ | $10^{10^{100}}$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | |

3- بين أن

$\forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists B \succ 0 \quad f(]B;+\infty[) \subset ]-\varepsilon;\varepsilon[$




-3

ليكن $\varepsilon \succ 0$

نبحث عن $B \succ 0$ حيث $x \succ B \Rightarrow |f(x)| \prec \varepsilon$

لدينا $\forall x \succ 0 \quad |f(x)| \prec \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} \prec \varepsilon \Leftrightarrow x \succ \dfrac{1}{\varepsilon}$

نأخذ $B=\dfrac{1}{\varepsilon}$

للحصول $\forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists B \succ 0 \quad x \succ B \Rightarrow |f(x)| \prec \varepsilon$

نقول إن $f(x)$ تؤول الى0 عندما يؤول $x$ إلى $+\infty$

نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

**تعريف**

لتكن $f$ يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]a;+\infty[$

نقول إن $f(x)$ تؤول الى0 عندما يؤول $x$ إلى $+\infty$ إذا وفقط إذا كان

$\forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists B \succ 0 \quad x \succ B \Rightarrow |f(x)| \prec \varepsilon$ نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

**خاصيات**

**خاصية1**

$$\forall(k;n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}^* \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{k}{x^n}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{k}{\sqrt{x}}=0$$

**خاصية2**

إذا وجد مجال على شكل $]a;+\infty[$ بحيث

$|f(x)|\le u(x)$ $\forall x\in]a;+\infty[$ وكان $\lim_{x\to+\infty}u(x)=0$ فان $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

تمرين تطبيقي

أحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{4x^2+3}$

$4x^2+3\succ x^2$ ومنه $\left|\frac{7}{4x^2+3}\right|\le\frac{7}{x^2}$ وحيث $\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{x^2}=0$ فان $\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{4x^2+3}=0$

## 2- النهاية $l$ عند $+\infty$

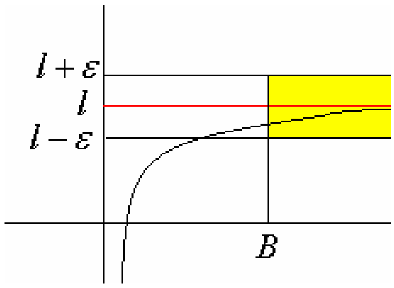
**تعريف**

لتكن $f$ يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]a;+\infty[$

نقول إن $f(x)$ تؤول الى $l$ عندما يؤول $x$ إلى $+\infty$ إذا وفقط

إذا كان $\forall\varepsilon\succ0 \quad \exists B\succ0 \quad x\succ B\Rightarrow|f(x)-l|\prec\varepsilon$

نكتب $\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$




مثال

بين أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2}{x^2+1}=1$

## 3- النهاية $l$ عند $-\infty$

**تعريف**

لتكن $f$ يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]-\infty;a[$

نقول إن $f(x)$ تؤول إلى $l$ عندما يؤول $x$ إلى $-\infty$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{x\to+\infty}f(-x)=l$

نكتب $\lim_{x\to-\infty}f(x)=l$

ملاحظات

- إذا كانت $f$ زوجية فان $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)$
- إذا كانت $f$ فردية فان $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\lim_{x\to+\infty}f(x)$

## III- النهايات المنتهية والترتيب

**خاصيات**

**خاصية1**

لتكن $f$ دالة معرفة على مجال مفتوح منقط $I$ مركزه $x_0$

إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ و $f$ موجبة على $I$ فان $l\geq 0$

**خاصية2**

لتكن $f$ دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه $x_0$

إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ بحيث $l\neq 0$ فانه يوجد مجال مفتوح منقط $J$ مركزه $x_0$ بحيث $\forall x\in J \quad f(x)\times l\succ 0$

**خاصية3**

$f$ و $g$ دالتان معرفتان على مجال مفتوح منقط $I$ مركزه $x_0$

إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l'$ و كان $f\geq g$ على $I$ فان $l\geq l'$

**خاصية4**

$f$ و $g$ و $h$ دوال معرفة عى مجال مفتوح منقط $I$ مركزه $x_0$

إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l$ وكان $f\geq h\geq g$ على $I$ فان $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=l$

## IV- العمليات على النهايات المنتهية

$f$ و $g$ دالتان لكل منهما نهاية منتهية في $x_0$ و $\lambda$ عدد حقيقي

الدوال $f+g$ و $\lambda f$ و $f\times g$ و $|f|$ لها نهاية منتهية في $x_0$

$$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x) \qquad \lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\times\lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}(\lambda\cdot f)(x)=\lambda\lim_{x\to x_0} f(x) \qquad \lim_{x\to x_0}|f(x)|=\left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right|$$

إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geq 0$ فان $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$

إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$ فان $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$

ملاحظة الخاصيات تبقى صالحة في $x_0=+\infty$ و $x_0=-\infty$

## V- العمليات على الدوال المتصلة

**خاصيات**

-* مجموع دالتين متصلتين في $x_0$ هي دالة متصلة في $x_0$

-* جداء دالتين متصلتين في $x_0$ هي دالة متصلة في $x_0$

-* جداء دالة متصلة في $x_0$ في عدد حقيقي هي دالة متصلة في $x_0$

-* اذا كانتا $f$ و $g$ دا لتين متصلتين في $x_0$ وكان $g(x_0)\neq 0$ فان الدالتين $\dfrac{1}{g}$ و $\dfrac{f}{g}$ متصلتان في $x_0$

-* اذا كانت $f$ موجبة على مجال مفتوح مركزه $x_0$ ومتصلة في $x_0$ فان دالة $\sqrt{f}$ متصلة في $x_0$

-* اذا كانت $f$ متصلة وكانت $x\to f(ax+b)$ دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه $x_0$ فان الدالة $x\to f(ax+b)$ متصلة في $x_0$

نتيجة

كل دالة جدرية متصلة على مجموعة تعريفها

تذكير الدالة الجدرية هي خارج دالتين حدوديتين

تمارين

1- حدد $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x}{x^2+x-6}$ ; $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-5x+2}{x^2-1}$ $\lim_{x\to 1}\sqrt{x^2+5x-2}$ ; $\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{x-2}$

2- أدرس اتصال الدوال

$f(x)=\frac{2x^2-3x+1}{x^2-x}$ $g(x)=x^2-1+\sqrt{x-2}$ $\begin{cases} h(x)=2x^2-x & x\succ 1 \\ h(x)=-x^2+2 & x\leq 1 \end{cases}$ $t(x)=\frac{2x^2-3x}{|x|}$

## VI - الدوال المثلثة

نقبل النتيجة $|\sin x|\leq|x|\leq|\tan x|$ $\forall x\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

### 1- نهايات و اتصال الدوال $x\to\sin x$ و $x\to\cos x$ و $x\to\tan x$

* لدينا $|\sin x|\leq|x|$ $\forall x\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ و $\lim_{x\to 0}|x|=0$ ومنه $\lim_{x\to 0}\sin x=0$

إذن الدالة $x\to\sin x$ متصلة في 0 ومنه الدالة $x\to\sin(ax+b)$ متصلة في 0

$\lim_{x\to 0}\cos x=\lim_{x\to 0}1-2\sin^2\frac{x}{2}=1$*

إذن $x\to\cos x$ متصلة في0

$\lim_{x\to 0}\tan x=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}=0$

$x\to\tan x$ متصلة في 0

* ليكن $x_0\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to x_0}\sin x=\lim_{h\to 0}\sin(x_0+h)$$
$$=\lim_{h\to 0}[\sin x_0\cosh+\sinh\cos x_0]$$
$$=\sin x_0\cos 0+\sin 0\cos x_0=\sin x_0$$

إذن دالة $x\to\sin x$ متصلة في $x_0$

**خاصية**

الدالتان $x\to\sin x$ و $x\to\cos x$ متصلتان في $\mathbb{R}$

الدالة $x\to\tan x$ متصلة في حيز تعريفها $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

**نتائج**

الدالتان $x\to\sin(ax+b)$ و $x\to\cos(ax+b)$ متصلتان في $\mathbb{R}$

الدالة $x\to\tan(ax+b)$ متصلة في حيز تعريفها

### 2- نهايات اعتيادية هامة

نحدد $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

لدينا $|\sin x|\leq|x|\leq|\tan x|$ $\forall x\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ ومنه $\frac{1}{|\tan x|}\leq\frac{1}{|x|}\leq\frac{1}{|\sin x|}$ حيث $x\neq 0$

وبالتالي $\frac{|\sin x|}{|\tan x|}\leq\frac{|\sin x|}{|x|}\leq\frac{|\sin x|}{|\sin x|}$ أي أن $|\cos x|\leq\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leq 1$

و حيث أن $\lim_{x\to 0}\cos x=1$ و $x$ و $\sin x$ لهما نفس الإشارة بجوار 0 فان $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}=1 \quad *$$

**خاصية**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad و \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \quad و \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

**نتيجة**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1 \quad و \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{ax}=1$$

تمرين

حدد $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{1+\sin x}$ ; $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}$ ، $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x}$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2}$ ، $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 3x}$ ،

$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 2x}$ ، $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$ ، $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{x-\frac{\pi}{4}}$ $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 2x}{\sin 4x+\sin 2x}$

## VII- النهايات اللامنتهية

### 1- النهاية $+\infty$ أو $-\infty$ عند $x_0$

تمرين

نعتبر $f(x)=\frac{1}{|x|}$

1- أنشئ $C_f$

2- أتمم الجدول التالي

| $x$ | $10^{-100}$ | $10^{-10^9}$ | $10^{-10^{12}}$ | $10^{-10^{100}}$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | |

ماذا تلاحظ (بين ذلك)

**تعريف**

* لتكن $f$ دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه 0.

$$\lim_{x\to 0}f(x)=+\infty \Leftrightarrow (\forall A\succ 0)\quad(\exists\alpha\succ 0)\quad(\forall x\in D_f)\quad 0\prec|x|\prec\alpha\Rightarrow f(x)\succ A$$

**خاصية**

لتكن $f$ دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه $x_0$.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}f(x_0+h)=+\infty$$

**خاصية**

لتكن $f$ دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه $x_0$.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}-f(x)=+\infty$$

**خاصية**

ليكن $k\in\mathbb{R}^{+*}$ ; $n\in\mathbb{N}^*$

$$\lim_{x\to 0}\frac{k}{\sqrt{|x|}}=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{k}{|x^n|}=+\infty$$

### 2- النهاية $+\infty$ أو $-\infty$ عند $+\infty$ أو $-\infty$

* لتكن $f$ دالة معرفة على مجال من نوع $]a;+\infty[$ .

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A \succ 0) \quad (\exists B \succ 0) \quad \forall x \in D_f \quad x \succ B \Rightarrow f(x) \succ A$$

**خاصية**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} -f(x) = +\infty$$

**خاصية**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(-x)$$

## النهايات والترتيب

* إذا كان لكل $x$ من $I$ , $f(x) \geq u(x)$ و كان $\lim_{x \to x_0} u(x) = +\infty$ فان $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

* إذا كان لكل $x$ من $I$ , $f(x) \leq u(x)$ و كان $\lim_{x \to x_0} u(x) = -\infty$ فان $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

ملاحظة الخاصيات السابقة تبقى صالحة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ أو عند $x_0$ على اليمين أو عند $x_0$ على اليسار مع تعويض $I$ على التوالي بالمجالات $]a;+\infty[$ و $]-\infty;a[$ و $]x_0;x_0+\alpha[$ و $]x_0-\alpha;x_0[$ $(\alpha \succ 0)$

## VIII- العمليات على النهايات اللامنتهية

تعتبر دالتين $f$ و $g$.

عند $x_0$ أو عند $x_0$ على اليمين أو عند $x_0$ على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ تكون لدينا النتائج التالية:

### أ- نهاية مجموع

| نهاية $f+g$ | نهاية $g$ | نهاية $f$ |
|---|---|---|
| $+\infty$ | $+\infty$ | $l \neq 0 \quad l$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $l \neq 0 \quad l$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| شكل غير محدد | $-\infty$ | $+\infty$ |

### ب- نهاية جداء

| نهاية $f \times g$ | نهاية $g$ | نهاية $f$ |
|---|---|---|
| $\infty$ مع وضع إشارة $l$ | $+\infty$ | $l \neq 0 \quad l$ |
| $\infty$ مع وضع عكس إشارة $l$ | $-\infty$ | $l \neq 0 \quad l$ |
| شكل غير محدد | $+\infty$ | 0 |
| شكل غير محدد | $-\infty$ | 0 |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

**ملاحظة:**

لحساب نهاية $\lambda f$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$ يمكن اعتبار $\lambda f$ كجداء الدالة الثابتة $x \to \lambda$ التي نهايتها هي $\lambda$ و الدالة $f$

## ج- نهاية خارج

| نهاية $\frac{f}{g}$ | نهاية $g$ | نهاية $f$ |
|---|---|---|
| 0 | $+\infty$ | $l$ |
| 0 | $-\infty$ | $l$ |
| $\infty$ مع وضع إشارة $l$ | $0^+$ | $l$ حيث $l \neq 0$ |
| $\infty$ مع وضع عكس إشارة $l$ | $0^-$ | $l$ حيث $l \neq 0$ |
| شكل غير محدد | 0 | 0 |
| شكل غير محدد | $+\infty$ | $+\infty$ |
| شكل غير محدد | $-\infty$ | $-\infty$ |
| شكل غير محدد | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\infty$ مع وضع إشارة $l$ | $l$ حيث $l \neq 0$ | $+\infty$ |
| $\infty$ مع وضع عكس إشارة $l$ | $l$ حيث $l \neq 0$ | $-\infty$ |

د- نهاية $\sqrt{f}$

| نهاية $\sqrt{f}$ | نهاية $f$ |
|---|---|
| $+\infty$ | $+\infty$ |

## IX- تطبيقات

### 1- دالة القوة الصحيحة

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$

- إذا كان $n$ زوجي فان $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$
- إذا كان $n$ فردي فان $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$

**نتيجة**

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

### 2- الدالة الحدودية

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots + a_1 x + a_0$$

$$f(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots\dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)$$

وحيث $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots\dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right] = 1$ فان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n$

نهاية دالة حدودية عند ما يؤول $x$ إلى $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حدها الأعلى درجة

## أمثلة

$$\lim_{x\to+\infty} -4x^5+3x^2-5x+1=\lim_{x\to+\infty} -4x^5=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} -3x^7+7x^3-x+31=\lim_{x\to-\infty} -3x^7=+\infty$$

## 3- الدالة الجدرية

نهاية دالة جدرية عند ما يؤول $x$ الى $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية خارج حديها الأكبر درجة

## أمثلة

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^5+3x^2-5x+1}{3x^2-x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^5}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{3}x^3=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^7+7x^3-x+31}{x^9+3x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^7}{x^9}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{x^2}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^5+3x^2-5x+1}{3x^5-x^4+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^5}{3x^5}=\frac{7}{3}$$

## تمارين

حدد النهايات

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3} \quad ; \quad \lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-2x-3}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1} \qquad \lim_{x\to2}\frac{x^2-x-6}{x-2}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{3x-2}{x^2-3x+2} \qquad \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\sqrt{x^2-2}-x \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}+3x}{2x-1}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2-x} \quad ; \quad \lim_{x\to1^+}\frac{2x^2-2}{\sqrt{x-1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+3}-4}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x+1}-4}$$