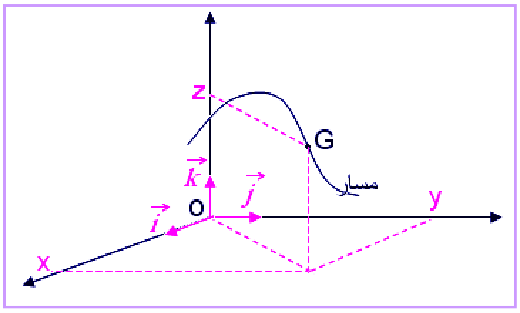
9 الميكانيك – قوانين نيوتن

I. حركية مركز القصور لجسم صلب

• معلمة الموضع

▪ استعمال أساس ديكارتي



في معلم الفضاء $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ يحدد موضع G مركز القصور لجسم صلب في حركة في كل لحظة بالمتجهة:

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}}$$

و تسمى متجهة الموضع.

$x = f(t)$ و $y = g(t)$ و $z = h(t)$ تسمى المعادلات الزمنية المميزة للحركة، أو المعادلات البارامترية للمسار .

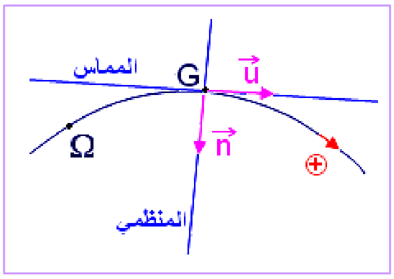
☜ في حالة حركة مستوية يكتفى بمعادلتين زمنيتين و في هذه الحالة تحدد معادلة المسار بإقصاء الزمن بينهما. و في حالة حركة مستقيمية توصف طبيعة الحركة بمعادلة زمنية واحدة.

▪ استعمال أساس فريني

تعريف

معلم أو أساس فريني هو الأساس $(G,\vec{u},\vec{n})$ بحيث:

- أصله مرتبط بالنقطة المتحركة G ،
- $\vec{u}$ متجهة واحدية حاملها المماس للمسار و موجهة في منحى موجب اعتباطي،
- $\vec{n}$ متجهة واحدية حاملها المنظمي و موجهة نحو تقعر المسار.



في حركة مستوية يمكن معلمة موضع النقطة المتحركة G بأفصولها المنحني: $\boxed{s = \widehat{\Omega G}}$ (m)

المعادلة الزمنية للحركة s=f(t).

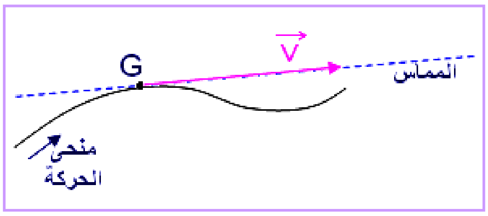
• متجهة السرعة

تعريف

تساوي متجهة السرعة اللحظية المشتقة بالنسبة للزمن لمتجهة الموضع: $\boxed{\vec{V}_G = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}}$

مميزات متجهة السرعة اللحظية للنقطة G في لحظة t هي:

- أصلها G،
- اتجاهها المماس للمسار في G ،
- منحاها هو منحى الحركة.



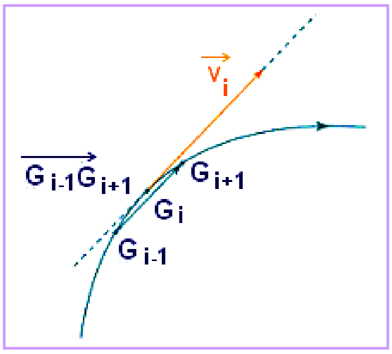
▪ تعبير متجهة السرعة

في أساس ديكارتي	في أساس فريني
$\vec{V}_G = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$ بحيث: $\vec{V}_G \begin{cases} v_x = \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dot{y} = \dfrac{dy}{dt} \\ v_z = \dot{z} = \dfrac{dz}{dt} \end{cases} \quad (m.s^{-1})$ إحداثيات متجهة السرعة تساوي في كل لحظة المشتقات بالنسبة للزمن لإحداثيات متجهة الموضع. و قيمة السرعة اللحظية هي: $\lVert\vec{V}\rVert = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (m.s^{-1})$	$\vec{V}_G = v\vec{u}$ بحيث: $v = \dot{s} = \dfrac{ds}{dt}$ تمثل v القيمة الجبرية لمتجهة السرعة اللحظية: $v = \pm\lVert\vec{V}\rVert$ تتعلق إشارة v بمنحى الحركة: ▪ v>0 : G تتحرك في المنحى الموجب أي منحى $\vec{u}$، ▪ v<0 : G تتحرك في المنحى السالب أي عكس منحى $\vec{u}$. و قيمة السرعة اللحظية هي: $\lVert\vec{V}\rVert = \lvert v\rvert \quad (m.s^{-1})$

▪ تحديد و إنشاء متجهة السرعة

انطلاقا من تسجيل لمواضع G خلال مدد متتالية و متساوية قيمتها τ يمكن تحديد قيمة السرعة اللحظية في موضع ما G_i بتطبيق علاقة التأطير التالية:

$$\vec{v}_i \approx \frac{\overrightarrow{G_{i-1}G_{i+1}}}{2\tau}$$



• متجهة التسارع

تعريف

تساوي متجهة التسارع اللحظي المشتقة بالنسبة للزمن لمتجهة السرعة أي المشتقة الثانية بالنسبة للزمن لمتجهة الموضع :

$$\vec{a}_G = \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2}$$

▪ تعبير متجهة التسارع

في أساس ديكارتي

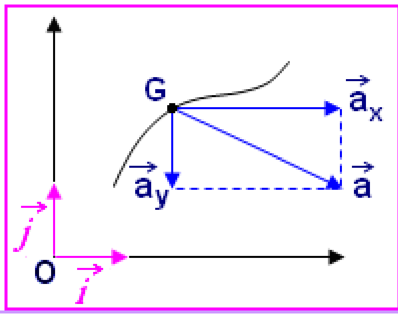
$$\vec{a}_G = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$$

بحيث:

$$\vec{a}_G \begin{cases} a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \\ a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \end{cases} \qquad (m.s^{-2})$$

و قيمة التسارع اللحظي هي:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}} \quad (m.s^{-2})$$



في أساس فريني

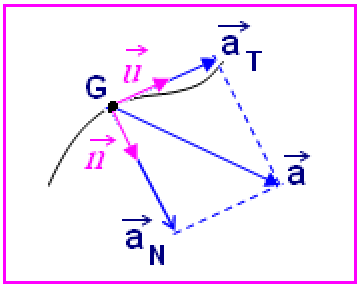
$$\vec{a}_G = a_T\,\vec{u} + a_N\,\vec{n}$$

بحيث: $\vec{a}_G \begin{cases} a_T = \dot{v} = \ddot{s} \\ a_N = \dfrac{v^2}{\rho} \end{cases} \qquad (m.s^{-2})$

ρ شعاع الانحناء للمسار في موضع G.وهو يساوي شعاع الدائرة المماسة للمسار في هذا الموضع.

و قيمة التسارع اللحظي هي:

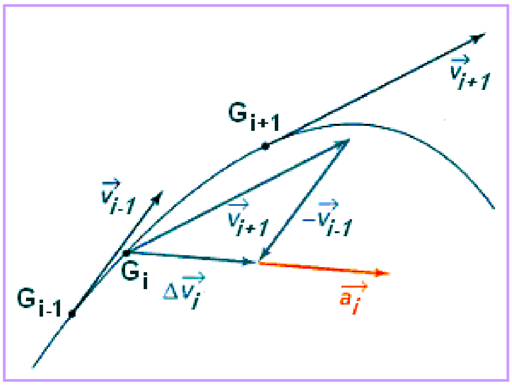
$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_T^{\,2} + a_N^{\,2}} \quad (m.s^{-2})$$



▪ إنشاء متجهة التسارع

باستغلال تسجيل لمواضع G خلال مدد متتالية و متساوية قيمتها τ يمكن إنشاء متجهة التسارع في موضع ما G_i بتطبيق علاقة التأطير التالية:

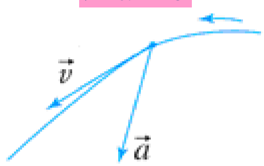
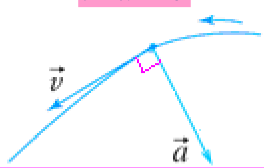
$$\vec{a}_i \approx \frac{\Delta\vec{v}_i}{2\tau} = \frac{\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_{i-1}}{2\tau}$$



خاصية	متجهة التسارع هي دائما موجهة نحو تقعر المسار.

▪ منحى متجهة التسارع و طبيعة الحركة

تحدد إشارة الجذاء السلمي $\vec{v}\cdot\vec{a} = v\cdot a_T$ طبيعة الحركة:

$\vec{v}\cdot\vec{a} > 0$	$\vec{v}\cdot\vec{a} < 0$	$\vec{v}\cdot\vec{a} = 0$
		
حركة متسارعة	حركة متباطئة	حركة منتظمة

II. قوانين نيوتن

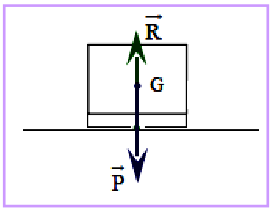
- مبدأ القصور (القانون الأول)

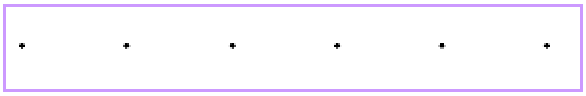
قانون

في معلم غاليلي إذا كان مجموع متجهات القوى الخارجية المطبقة على جسم صلب منعدما(جسم معزول أو شبه معزول) فإن مركز قصوره G يكون في حالة السكون أو في حركة مستقيمية منتظمة:

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0} \quad \leftrightarrow \quad \vec{V}_G = \overrightarrow{Cte}$$

▪ تحقق تجريبي: يرسل حامل ذاتي على منضدة أفقية بدون احتكاك و تسجل مواضع مركز قصوره G خلال مدد زمنية متتالية و متساوية.





يلاحظ أن حركة G مستقيمية و منتظمة و $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$

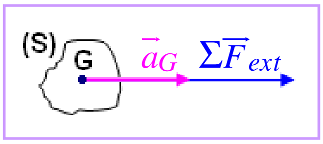
- مبرهنة مركز القصور (القانون الثاني)

قانون

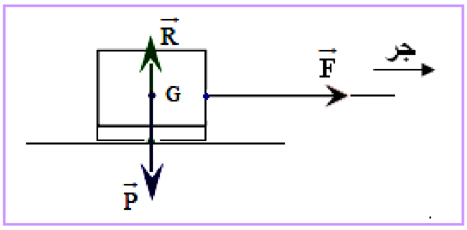
في معلم غاليلي يساوي مجموع متجهات القوى الخارجية المطبقة على جسم صلب متحرك جذاء كتلته و متجهة تسارع مركز قصوره في كل لحظة:

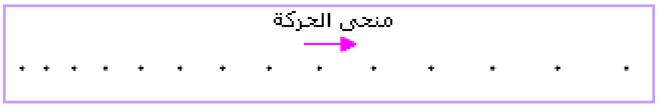
$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$$ (العلاقة الأساسية للديناميك)

☜ متجهة التسارع و مجموع متجهات القوى مستقيميتان و لهما نفس المنحى في كل لحظة خلال حركة الجسم.



▪ تحقق تجريبي: يجر حامل ذاتي على منضدة أفقية بدون احتكاك تحت تأثير قوة ثابتة $\vec{F}$ اتجاهها أفقي و تسجل مواضع مركز قصوره G خلال مدد زمنية متتالية و متساوية.





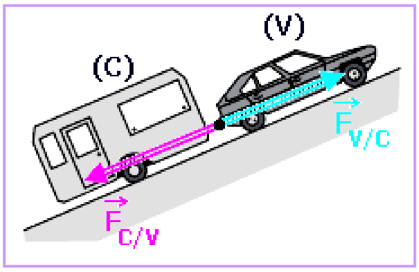
يمكن التحقق من أن حركة G مستقيمية و متسارعة بانتظام أي $\vec{a}_G = \overrightarrow{cte}$

و أن: $\frac{F}{a_G} = m$ كما أن $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{F}$ و $\vec{a}_G$ مستقيميتان و لهما نفس المنحى.

- مبدأ التأثيرات البينية(القانون الثالث)

قانون

إذا كان جسمان A و B في تأثير بيني فإن القوتين المرتبطتين بهذا التأثير متعاكستان سواء كان الجسمان في حالة السكون أو في حركة: $\vec{F}_{B/A} = -\vec{F}_{A/B}$



- **مثال:** التأثير البيني الحاصل بين سيارة و مقطورة.
القوة المرتبطة بتأثير السيارة على المقطورة و القوة المرتبطة بتأثير المقطورة على السيارة قوتان متعاكستان.

- طريقة منهجية لتطبيق القانون الثاني لنيوتن
  - ✓ اختيار معلم غاليلي (معلم أرضي غالبا)،
  - ✓ تحديد المجموعة المدروسة،
  - ✓ جرد القوى الخارجية المطبقة عليها،
  - ✓ تطبيق ع.أ.د. $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$
  - ✓ إسقاطها في معلم للفضاء:

- في معلم ديكارتي:

$$\begin{cases} F_{1x} + F_{2x} + \ldots = ma_x \\ F_{1y} + F_{2y} + \ldots = ma_y \\ F_{1z} + F_{2z} + \ldots = ma_z \end{cases}$$

- أو في معلم فريني (في حركة دائرية خاصة):

$$\begin{cases} F_{1T} + F_{2T} + \ldots = ma_T \\ F_{1N} + F_{2N} + \ldots = ma_N \end{cases}$$

III. الحركة المستقيمية المتغيرة بانتظام

تعريف

تعتبر حركة مركز القصور G لجسم صلب مستقيمية متغيرة بانتظام إذا كان مساره مستقيما و تسارعه ثابتا: $\vec{a}_G = \vec{cte}$

- المعادلات الزمنية

التسارع	السرعة	الأفصول
$a = cte$	$v = at + v_0$	$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$

v_0 و x_0 على التوالي السرعة و الأفصول عند اللحظة t=0 و يحددان تبعا لاختيار الشروط البدئية.

- العلاقة المستقلة عن الزمن

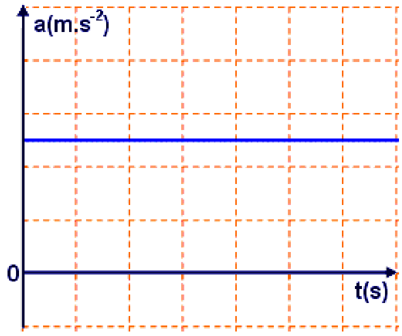
بإقصاء الزمن بين معادلة السرعة و معادلة الأفصول يتوصل إلى العلاقة التالية:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1)$$

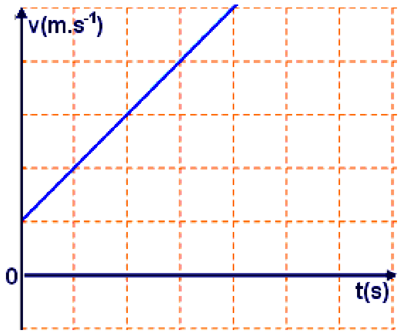
- مخططات الحركة

فيما يلي مثال لمخططات الحركة المستقيمية المتغيرة بانتظام.

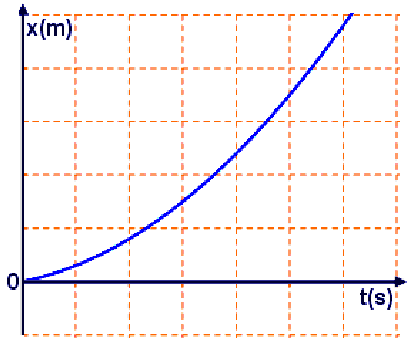
مخطط التسارع



مخطط السرعة



مخطط المسافات



تمارين

تمرين 1

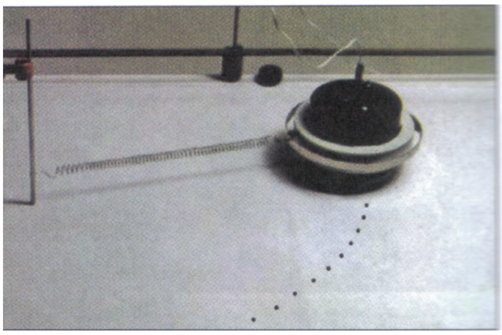
أعطت دراسة تجريبية لحركة مركز القصور G لجسم صلب النتائج التالية:

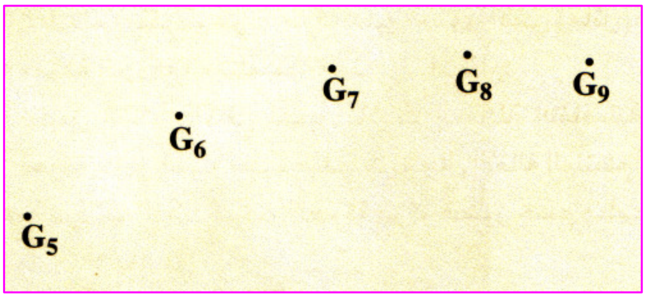
التاريخ t(s)	0	0,1	0,2	0,3	0,4
الأفصول x(m)	0	0,08	0,16	0,24	0,32
الأرتوب y(m)	0	0,05	0,20	0,45	0,80

-1 مثل المبيانين $x = f(t)$ و $y = f(t^2)$ باختيار سلم مناسب.
-2 استنتج المعادلتين الزمنيتين $x = f(t)$ و $y = g(t)$.ما طبيعة الحركة على كل محور؟
-3 أوجد معادلة مسار G في المعلم الديكارتي (O,x,y).
-4 عبر عن متجهة السرعة $\vec{v}$ و متجهة التسارع $\vec{a}$ في لحظة t في المعلم (O,x,y).
-5 بين أن $\vec{a}$ متعامدة مع $\vec{v}$ في اللحظة $t = 0$ ثم أحسب شعاع الانحناء ρ للمسار في نفس اللحظة.

تمرين 2

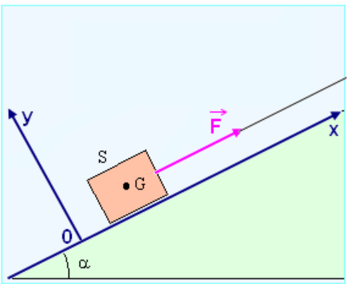
يربط حامل ذاتي كتلته $m = 780\ g$ بطرف نابض لفاته غير متصلة و صلابته $k = 26\ N.m^{-1}$، طرفه الآخر مثبت بحامل على منضدة أفقية (الشكل 1).يرسل الحامل الذاتي على المنضدة و تسجل حركة مركز قصوره G خلال مدد زمنية متتالية و متساوية قيمتها $\tau = 40\ ms$.
يمثل الشكل 2 تسجيل جزء من مسار المتحرك بالسلم الحقيقي.
-1 مثل متجهة السرعة في الموضع G_6 ثم في الموضع G_8 بالسلم التالي: 1 cm تمثل $0,1\ m.s^{-1}$.
-2 أنشئ المتجهة $\Delta\vec{V}$ في الموضع G_7.
-3 إستنتج قيمة متجهة التسارع في الموضع G_7 و مثلها على الشكل بالسلم التالي: 1 cm تمثل $1\ m.s^{-2}$.
-4 أحسب شدة القوة التي يطبقها النابض على الحامل الذاتي في الموضع G_7 ثم استنتج إطالته.





تمرين 3

يوضع جسم صلب (S) كتلته $m = 80\ kg$ على سطح مستو و مائل بالزاوية $\alpha = 12°$ بالنسبة للخط الأفقي. بواسطة حبل تطبق قوة ثابتة $\vec{F}$ لسحب الجسم (S) نحو الأعلى بدون سرعة بدئية و بتسارع ثابت $a = 2\ m.s^{-2}$. معامل الاحتكاك بين الجسم و سطح التماس هو: $k = \frac{R_T}{R_N} = 0,25$.



-1 حدد طبيعة حركة مركز القصور G للجسم (S).
-2 أحسب سرعة الجسم بعد أن يقطع المسافة $d=1\ m$.
-3 اكتب معادلتها الزمنية $x(t)$ باعتبار O موضع G في اللحظة $t = 0$.
-4 أحسب شدة القوة $\vec{F}$.