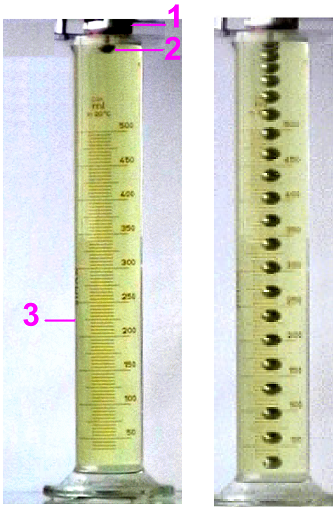
# 10 السقوط الرأسي لجسم صلب

## I. السقوط الرأسي باحتكاك



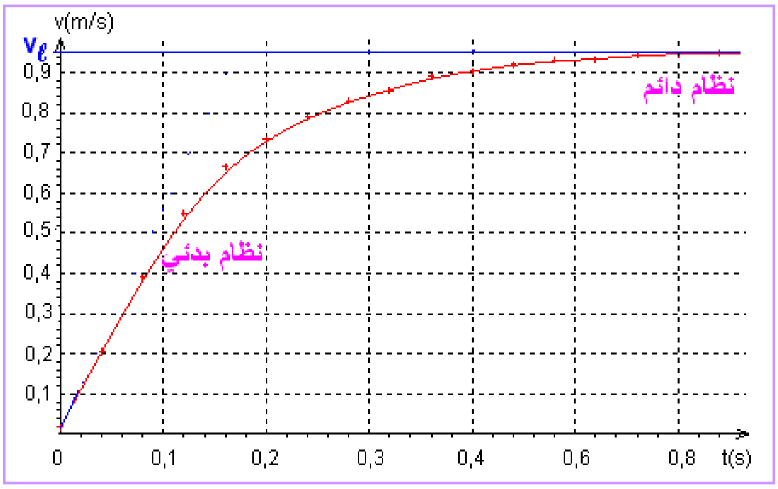

(1) كهرمغنطيس
(2) كرية فولاذية
(3) أنبوب مملوء بزيت

### • دراسة تجريبية

بواسطة كاميرا رقمية تصور حركة كرية فولاذية تسقط في مائع ( محلول الغليسيرول أو زيت ) بدون سرعة بدئية . تمكن معالجة الشريط بواسطة حاسوب من تحديد مواضع مركز القصور للكرية و حساب سرعته اللحظية v(t) .

يبرز مخطط السرعة v = f(t) نظامين:

- نظام بدئي يسمى النظام الانتقالي حيث ترتفع سرعة الكرية ، مع تناقص في التسارع.
- نظام نهائي يسمى النظام الدائم حيث سرعة الكرية تؤول إلى قيمة حدية $v_\ell$ تبقى ثابتة.




### • دراسة نظرية

#### ▪ جرد القوى و مميزاتها

في مائع يخضع جسم لثلاث قوى و هي:

| وزنه | دافعة أرخميد | قوة الاحتكاك المائع |
|---|---|---|
| $\boxed{\vec{P} = m\vec{g}}$<br>- الاتجاه: رأسي<br>- المنحنى: نحو الأسفل<br>- الشدة:<br>$P = mg = \rho V g \quad (N)$<br>$m$ كتلة الجسم $(kg)$<br>$\rho$ كتلته الحجمية $(kg \cdot m^{-3})$<br>$V$ حجمه $(m^3)$<br>$g$ شدة الثقالة $(N \cdot kg^{-1})$ | $\boxed{\vec{F}_A = -\rho_0 V \vec{g}}$<br>- الاتجاه: رأسي<br>- المنحنى: نحو الأعلى<br>- الشدة:<br>$F_A = \rho_0 V g \quad (N)$<br>$\rho_0$ الكتلة الحجمية للمائع<br>$V$ حجم الجسم باعتباره مغمورا كليا في المائع. | $\boxed{\vec{f} = -K v^n \vec{k}}$<br>- الاتجاه: اتجاه متجهة سرعة مركز قصور الجسم.<br>- المنحنى: معاكسة لمتجهة سرعة مركز قصور الجسم.<br>- الشدة:<br>$F_A = K v^n \quad (N)$<br>n=1 في حالة سرعة حدية ضعيفة.<br>n=2في حالة سرعة حدية مرتفعة.<br>K ثابتة تتعلق بنوعية المائع و بشكل الجسم. |

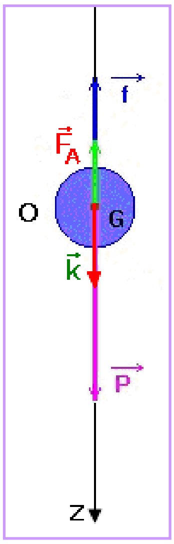
☜ لمقارنة وزن الجسم و دافعة أرخميد التي يطبقها المائع عليه تعتبر النسبة التالية:

$$\frac{F_A}{P}=\frac{\rho_0 V g}{\rho V g}=\frac{\rho_0}{\rho}$$

في الحالة $\rho_0 \ll \rho$ يمكن إهمال دافعة أرخميد أمام وزن الجسم.

كمثال لهذه الحالة سقوط جسم صلب كثيف(كرية فولاذية مثلا) في الهواء.

## ▪ المعادلة التفاضلية للحركة




تطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم (الكرية) يعطي: $\vec{P}+\vec{F}_A+\vec{f}=m\vec{a}_G$

بالإسقاط على المحور(Oz) تستنتج المعادلة التفاضلية المميزة للسقوط الرأسي باحتكاك:

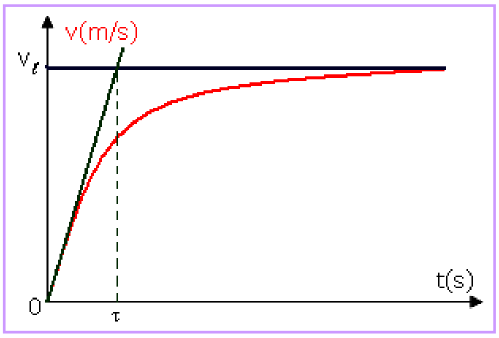
$$\boxed{\frac{dv}{dt}+\alpha v^n=\beta}$$

بوضع:

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{k}{m}\\ \beta=g\left(1-\dfrac{\rho_0}{\rho}\right)\end{cases}$$

## ▪ المقادير المميزة للحركة

| | |
|---|---|
| **السرعة الحدية** | ▪ مبيانيا: باستغلال مخطط السرعة |
| | ▪ نظريا: باعتبار $v=v_\ell=cte$ في المعادلة التفاضلية يتوصل إلى: $\boxed{v_\ell=\left[\frac{mg}{k}\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)\right]^{\frac{1}{n}}}$ |
| **التسارع البدئي** | ▪ مبيانيا: تساوي ميل المماس لمخطط السرعة عند أصل التواريخ. |
| | ▪ نظريا: باعتبار $v_0=0$ في المعادلة التفاضلية يستنتج: $\boxed{a_0=g\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)}$ |
| **الزمن المميز** | ▪ مبيانيا: يمثل أفصول نقطة تقاطع المماس عند أصل التواريخ مع المقارب. |
| | ▪ نظريا: $\boxed{\tau=\frac{v_\ell}{a_0}}$ |




## ▪ حل المعادلة التفاضلية بطريقة "أولير"

❖ من المعادلة التفاضلية يستنتج التسارع في لحظة $t_i$: $\quad \boxed{a_i=\beta-\alpha v_i^n} \quad (1)$

❖ من جهة أخرى في مجال زمني $\delta t$ صغير جدا يمكن تطبيق المقاربة التالية: $\dfrac{dv}{dt}\approx\dfrac{\delta v}{\delta t}$

أي: $a_i\approx\dfrac{v_{i+1}-v_i}{\delta t}$ و منها: $\quad \boxed{v_{i+1}=v_i+a_i\,\delta t} \quad (2)$

❖ بمعرفة السرعة البدئية $v_0$ و الثابتتين $\alpha$ و $\beta$ تمكن العلاقتان (1) ثم (2) من حساب قيم السرعة اللحظية للجسم خطوة خطوة في لحظات متتالية تفصل بينها المدة $\delta t$. هذه المدة تسمى "خطوة الحساب".

و بالتالي يمكن تمثيل المنحنى النظري $v=f(t)$.

❖ تعطي هذه الحسابات نتائج أكثر دقة كلما كانت المدة $\delta t$ أصغر، عموما تؤخذ: $\delta t = \frac{\tau}{10}$ ( $\tau$ الزمن المميز).

❖ يمكن التطابق بين النتائج النظرية و التجريبية من التحقق من صلاحية نموذج قوة الاحتكاك المعمول به:

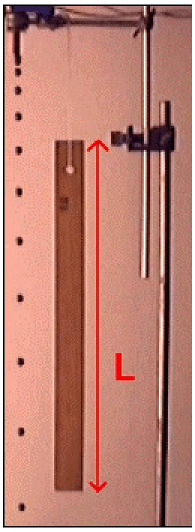
$f = Kv$ $(n=1)$ أو $f = Kv^2$ $(n=2)$.

## II. السقوط الرأسي الحر

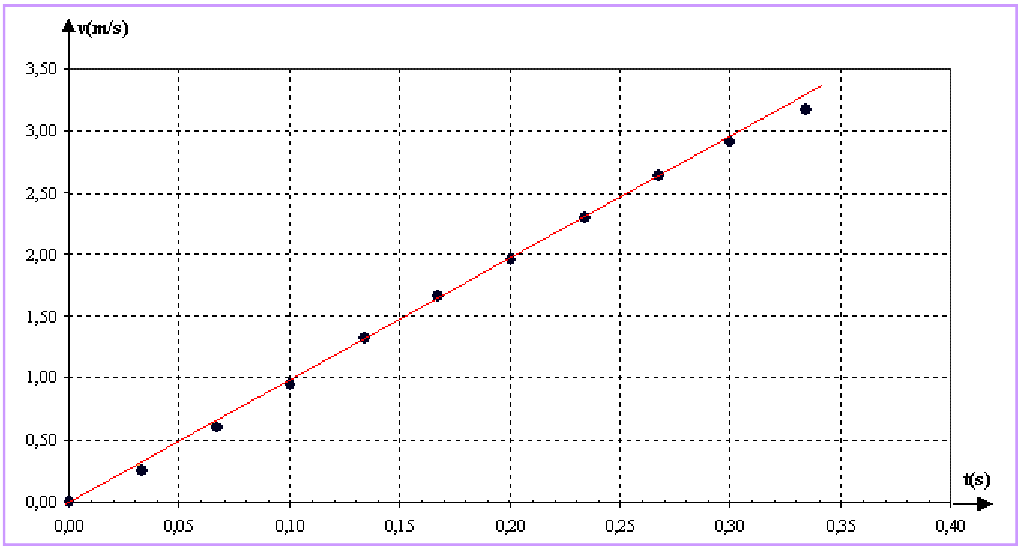
**تعريف** يعتبر جسم في سقوط حر إذا كان يخضع لوزنه فقط.

• دراسة تجريبية

بواسطة كاميرا رقمية نصور حركة كرية فولاذية تسقط في الهواء بدون سرعة بدئية . تمكن معالجة الشريط بواسطة حاسوب من تحديد مواضع مركز القصور للكرية و حساب سرعتها اللحظية v(t).




مخطط السرعة مستقيم: حركة الكرية مستقيمية متسارعة بانتظام، و تسارعها هو: $\boxed{a = g}$




☞ مبيانيا التسارع يساوي ميل المستقيم.

• دراسة نظرية

▪ المعادلة التفاضلية

يخضع الجسم(الكرية) لوزنه فقط: $\vec{P} = m\vec{g}$

و بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم: $\vec{P} = m\vec{a}_G$

يستنتج تسارع مركز قصوره: $\vec{a}_G = \vec{g}$

ثم بالإسقاط على محور(Oz) رأسي موجه نحو الأسفل، تستنتج المعادلة التفاضلية المميزة للسقوط الرأسي الحر:

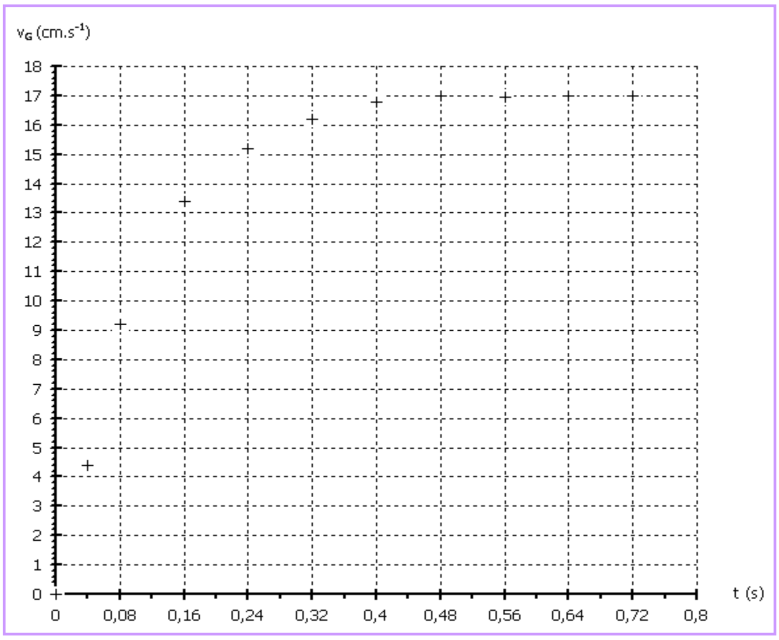
$$\boxed{\frac{dv}{dt} = g}$$

- المعادلات الزمنية

| | |
|---|---|
| **التسارع** | $a = g$ |
| **السرعة** | $v = gt + v_0$ |
| **الموضع** | $z = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0$ |

# تمارين

## تمرين 1




أعطت الدراسة التجريبية لحركة السقوط الرأسي لكرية في زيت المحرك المخطط التالي.
تدرس حركة الكرية في معلم أرضي و يعتبر كمعلم للفضاء محور رأسي Oz موجه نحو الأسفل.

♦<u>معطيات</u>:

كتلة الكرية: $m = 35,0\ g$

حجمها: $V = 33,5\ cm^3$

الكتلة الحجمية للزيت: $\rho = 0,910\ g.cm^{-3}$

شدة الثقالة: $g = 9,81\ m.s^{-2}$

يفترض أن قوة الاحتكاك تحقق العلاقة التالية:

$$\vec{f} = -k \cdot \vec{v}_G$$

حيث k ثابتة و $\vec{v}_G$ سرعة مركز القصور للكرية.

**1-** بين أن $v_G$ تحقق المعادلة التالية:

$$\frac{dv_G}{dt} = A - B \cdot v_G$$

محددا تعبير الثابتتين A و B بدلالة المعطيات اللازمة.

**2-** حدد و حدة الثابتة A في النظام العالمي للوحدات و تحقق من قيمتها: $A = 1,27\ S.I$.

**3-** 1.3- حدد على المخطط v(t) نظامي الحركة.

2.3- حدد مبيانيا السرعة الحدية للكرية و الزمن المميز لحركتها.

**4-** علما أن $B = 7,5\ s^{-1}$ تمكن طريقة أولير من تقدير قيمة السرعة حسابيا بدلالة الزمن.نحصل على النتائج التالية:

| t (s) | 0 | 0,080 | 0,16 | 0,24 | 0,32 | 0,40 | 0,48 | 0,56 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{dv_G}{dt}$ $(m.s^{-2})$ | ? | 0,51 | 0,20 | ? | 0,03 | 0,02 | 0,00 | 0,00 |
| $v_G$ $(m.s^{-1})$ | 0 | 0,102 | 0,143 | ? | 0,165 | 0,167 | 0,169 | 0,169 |

1.4- ما هي خطوة الحساب؟

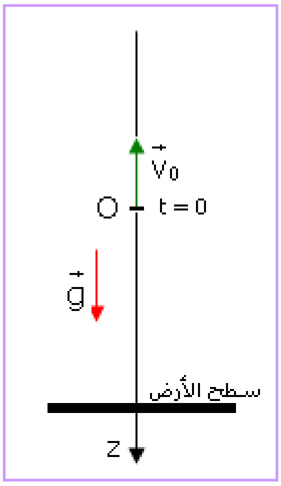
2.4- حدد تسارع الكرية في اللحظة $t = 0$.

3.4- باستعمال طريقة أولير أحسب سرعة الكرية في اللحظة $t = 0,24\ s$ ثم استنتج تسارعها في نفس اللحظة.

**5-** 1.5- ضع على المخطط v(t) قيم السرعة التي تم حسابها بطريقة أولير و خطط المنحنى النظري الناتج.

2.5- بمقارنة المنحنيين النظري و التجريبي علق على صلاحية النموذج $\vec{f} = -k \cdot \vec{v}_G$.

## تمرين 2




من نقطة O، تقع على ارتفاع 5 m من سطح الأرض ، تقذف كرية رأسيا نحو الأعلى بسرعة بدئية تساوي $4,0\ m.s^{-1}$.

**1-** أكتب المعادلة الزمنية لحركة الكرية في المعلم Oz باعتبار سقوطها حرا.

**2-** حدد الارتفاع الذي تصله الكرية.

**3-** حدد سرعتها بعد عودتها إلى O.

**4-** ما هي المدة التي تستغرقها لكي تصل سطح الأرض؟

♦<u>تؤخذ</u>: $g = 10\ m.s^{-2}$